

ОДЕЉЕЊЕ ОБДАРЕНИХ УЧЕНИКА МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

12.03.2020.

1. Одредити најмањи природан број који при дељењу са  $2, 3, 4, \dots, 9, 10$  даје остатке  $1, 2, 3, \dots, 8, 9$  редом.
2. Дато је пет природних бројева. Доказати да међу њима постоје два броја чија је разлика дељива са 4.
3. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног броја записује се само помоћу неколико цифара 4. Одредити о којим бројевима се ради.
4. Производ природних бројева  $x$  и  $y$  је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрени број, такође са једнаким цифрама. Наћи све такве  $x$  и  $y$ .
5. Одредити највећи троцифрени број који при дељењу са 43 даје остатак једнак количнику.
6. Природан број  $n$  подељен са 6 даје остатак 4, а подељен са 15 остатак 7. Колики је остатак при дељењу  $n$  са 30?
7. Једна збирка задатака из математике је у књижари коштала 50 динара, али је по тој цени продато само неколико примерака. Када је књижара снизила цену, све преостале збирке продате су за 3193 динара (нова цена је цео број динара). Колико је било снижење цене?
8. Наћи све природне бројеве  $x$  и  $y$  тако да је:  
1)  $2(x^2 + 2y^2) = 5(xy + 1)$ ;                      2)  $x^2 + 3x + 24 = y^2$ .
9. Ако је  $m$  цео број, доказати да је цео и број:  
1)  $A = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$ ;                      2)  $B = \frac{m^2}{2} - \frac{2m}{3} + \frac{m^3}{6}$ ;                      3)  $C = \frac{m^5 - 5m^4 + 4m}{120}$ .
10. Доказати да разлика квадрата два непарна цела броја дељив са 8.
11. Наћи све природне бројеве  $n$  такве да разломак  $\frac{7n + 5}{3n + 2}$  може да се скрати.
12. Доказати да број  $n^2 - n + 2$  није дељив са 49 ни за један природан број  $n$ .
13. Одредити све природне бројеве  $n$  за које је број  $n^4 + 4$  прост.
14. Природан број  $n$  подељен са 3 даје остатак 2, а подељен са 37 остатак 22. Колики је остатак при дељењу  $n$  са 111?
15. Нека је  $n$  природан број такав да је  $1 + 2 + \dots + n$  троцифрен број чије су све цифре једнаке. Израчунати збир цифара броја  $n$ .
16. Ако је  $p$  прост број већи од 3, доказати да је  $p^2 - 1$  дељиво са 24.